Lista de exercícios
Ualype

Versão: 02 de Abril, 2022

Fórmulas Importantes

Derivada material

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$$

Fluido Incompressível

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Equação de Euler

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

$f \to$ força externa por unidade de volume.
$\eta \to$ viscosidade do fluido.

Equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \Psi + \frac{v^2}{2} = const.$$

$\Psi \to$ energia potencial por unidade de massa.

Problemas

Problema 1. **(a)** Demonstre a equação de continuidade na forma mostrada, e então prove que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ para um escoamento de um fluido incompressível. Use o fato de que, dentro de um volume de controle fixo, massa não pode ser criada nem destruída. Utilize o Teorema de Gauss: $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\vec{S}$

(b) Demonstre a Equação de Bernoulli, válida ao longo de qualquer linha de corrente em um escoamento estacionário. Use o fato de que, dentro de um volume de controle, energia não pode ser criada nem destruída.

(c) Fora do regime estacionário, é necessária uma correção ao Teorema de Bernoulli. Assumindo um escoamento irrotacional ($\nabla \times \vec{v} = 0$), é possível atribuir ao campo de velocidades um potencial ϕ tal que $\vec{v} = -\nabla \phi$. Com isso, mostre que

$$\frac{p}{\rho} + \Psi + \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t)$$

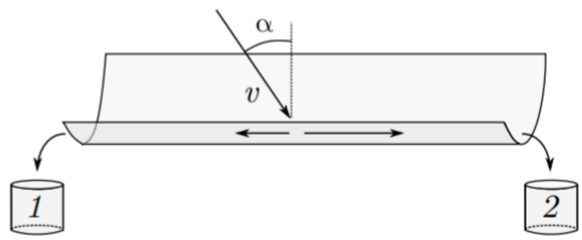
Problema 2. Este problema trata de duas situações envolvendo viscosidade de líquidos.

(a) Considere um escoamento estacionário de um líquido de densidade ρ e viscosidade η em um cilindro de raio R e comprimento L. Suponha que esse estado estacionário é mantido por uma queda de pressão ΔP entre as bordas do cilindro, caracterizando um escoamento de Poiseuille. Determine o perfil de velocidade $v(r)$. Negligencie componentes azimutais ou radiais de velocidade.

(b) Considere um escoamento laminar estacionário de um líquido entre dois cilindros coaxiais infinitos, de raios R_1 e R_2 e velocidades angulares Ω_1 e Ω_2, respectivamente. Determine o perfil de velocidade $v(r)$ do fluido, negligenciando componentes axiais ou radiais de velocidade. Saiba que o torque da força viscosa em relação ao centro independe de r.

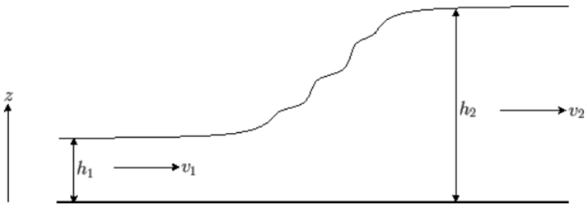
Problema 3. Um pneu está preenchido por um gás ideal de expoente adiabático γ e massa molar μ, a uma temperatura T. O gás flui para o exterior através de um pequeno furo. Encontre a velocidade do gás fora do pneu nas proximidades do furo se o fluxo é laminar e estacionário e o meio externo é quase vácuo.

Problema 4. Um jato de água cai contra o fundo de uma calha com velocidade v e se divide em correntes menores indo para a esquerda e para a direita. Encontre as velocidades de ambos as correntes se o jato de entrada possui um ângulo de incidência α. Determine também a proporção entre as quantidades de água transportadas por unidade de tempo (vazão) nas duas correntes de saída.



Problema 5. Um fluido escoa de forma estacionária e

incompressível, com velocidade média v_1 na extremidade esquerda da figura, em direção à extremidade direita. Ele realiza um "salto hidráulico", de uma altura inicial h_1 para uma altura final h_2. Determine h_2 em função de h_1, e do número de Froude do regime inicial, $Fr_1 \equiv \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}$. Sob quais condições: **(i)** $h_2 > h_1$? **(ii)** $h_2 = h_1$? **(iii)** $h_2 < h_1$? Observe que a energia não é conservada. Despreze efeitos de viscosidade.

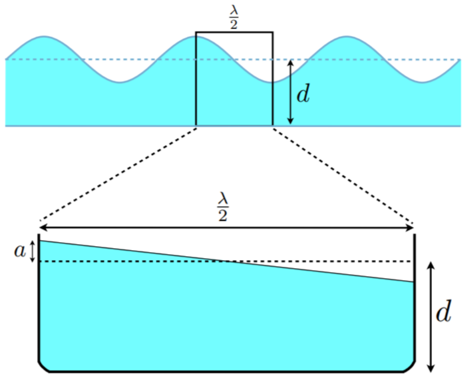


Problema 6. Encontre a velocidade de propagação de pequenas ondas em águas rasas. A água é considerada rasa se o comprimento de onda é consideravelmente maior do que a profundidade da água H. Graças a isso, podemos supor que, ao longo de uma seção transversal vertical, a velocidade horizontal de todas as partículas é a mesma e que a velocidade vertical das partículas de água e é significativamente menor do que a velocidade horizontal. O fato de a onda ser pequena significa que sua altura é significativamente menor do que a profundidade da água. Isso nos permite supor que a velocidade horizontal das partículas de água é significativamente menor que a velocidade da onda.

Problema 7. Um tsunami ao mar aberto pode ser modelado como ondas se propagando em águas rasas. Utilizemos o modelo de meia onda, no qual a seção mostrada do tsunami pode ser estudada considerando um tanque de água conforme mostrado abaixo, no qual o líquido oscila para frente e para trás em torno do ponto médio de sua superfície livre (mantendo-a sempre plana), sem dissipações. Note que a altura a oscila no tempo. O comprimento do tanque de água é $L = \lambda/2$, e sua largura é b. Assuma $a \ll d \ll L$. Utilize um sistema de coordenadas xy com origem no ponto médio da superfície livre da água.

(a) Escreva a velocidade horizontal da água em função de L, $\dot{a}$, d e x, assumindo que ela não varia com a profundidade do tanque.

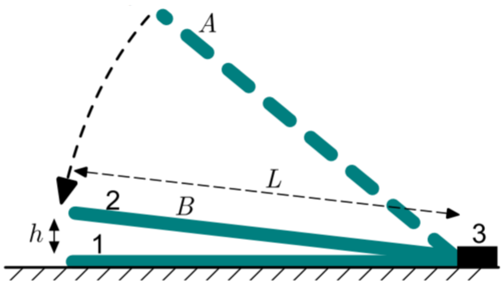
(b) Expresse a energia cinética da água em termos de



b, ρ, L, d e $\dot{a}$, bem como a energia potencial gravitacional total em termos de b, ρ, g, L e a. Assuma que a energia cinética é devido quase inteiramente ao movimento horizontal da água.

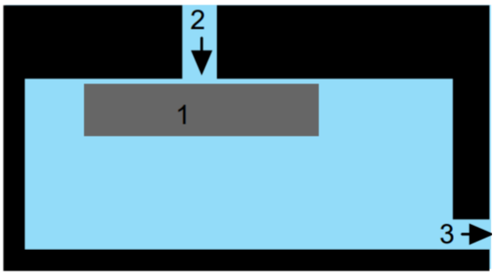
(c) Mostre que o sistema apresenta oscilações harmônicas simples e determine o período T das oscilações. Com isso, determine a velocidade de propagação do tsunami.

Problema 8. **(a)** Se você deixar uma placa de vidro cair sobre outra placa de vidro, ela não quebrará. Na verdade, ela irá parar suavemente. A figura retrata, uma placa (marcada com '1') apoiada no chão, enquanto outra placa (marcada com '2') está caindo, com um solavanco no chão (marcado com '3') que impede seu deslizamento. A placa foi abandonada da posição A e está agora na posição B, a uma distância muito pequena $h = h_0$ da placa que está em repouso, e possui uma velocidade angular ω_0. Qual é a velocidade do ar entre as placas perto da extremidade esquerda?



(b) A placa de vidro tem largura $L \gg h_0$, espessura $t \ll L$, densidade ρ_g e seu comprimento (no plano normal à figura) é muito maior do que L. Como a velocidade angular da placa depende de h durante o movimento se a densidade do ar é ρ_a? Despreze a gravidade, bem como a viscosidade e a compressibilidade do ar. Suponha que o fluxo de ar é laminar em todos os pontos.

(c) Um disco cilíndrico de pedra (marcado com '1' na figura) de raio R, espessura h e densidade ρ_s é pressionado contra o teto de uma bacia cheia de água de densidade ρ_w. Pequenas saliências na superfície do teto proporcionam uma pequena folga de espessura $t \ll R$ entre o teto e a superfície do disco. A água flui por um cano (marcado com '2'; o cano de saída '3' está longe) de raio $r \ll R$ coaxial com o disco e com a bacia, conforme mostra a figura. O raio do cano é muito maior do que a distância entre o disco e o teto, ou seja, $r \gg t$. Qual deve ser o fluxo de massa μ (kg/s) que passa através do cano para impedir que o disco caia? A aceleração gravitacional é g.



Gabarito

1. Demonstração.

2. **(a)** $v(r) = \dfrac{\Delta P}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$

   (b) $v(r) = \dfrac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \dfrac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \dfrac{1}{r}$

3. $v = \sqrt{\dfrac{2\gamma RT}{\mu(\gamma - 1)}}$

4. $v_1 = v_2 = v$ e $\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$

5. $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1}{2}$

(i) $Fr > 1$ **(ii)** $Fr = 1$ **(iii)** $Fr < 1$

6. $\sqrt{gH}$

7. **(a)** $v(x) = \dfrac{\dot{a}}{4hL}(L^2 - 4x^2)$

   (b) $U = \dfrac{1}{6} b\rho g L a^2$ e $K = \dfrac{1}{60}\dfrac{b\rho L^3}{d}\dot{a}^2$

   (c) $T = \dfrac{2\pi L}{\sqrt{10gd}}$ e $v = \dfrac{\sqrt{10gd}}{\pi} \approx \sqrt{gd}$

8. **(a)** $v(x = L) = \dfrac{L^2\omega}{2h}$

   (b) $\omega = \omega_0 \sqrt{\dfrac{1 + a/h_0}{1 + a/h}}$ com $a = \dfrac{3\rho_a L^2}{16\rho_g t}$

   (c) $\mu = 2\pi R t \sqrt{\dfrac{h\rho_w(\rho_s - \rho_w)}{\ln(R/r)}}$