Lista de exercícios - Tensão Superficial

Ualype **Versão: 07 de Abril, 2022**

Problemas

1. Só o básico

Moléculas de uma substância na fase líquida são atraídas por outras moléculas do líquido e, por isso, têm uma certa energia potencial negativa com relação ao infinito. Note que aquelas moléculas do líquido que estão diretamente na interface líquido-gás estão sendo atraídas apenas pelas outras moléculas do lado da fase líquida. Por isso, para as moléculas diretamente na superfície, quando comparadas com as moléculas no volume do líquido, o números de vizinhos "puxando" é menor e, respectivamente, a energia potencial negativa é menor em módulo. Essa energia negativa que falta pode ser interpretada como uma energia positiva da superfície, a qual é proporcional ao número de moléculas na superfície, o qual, por sua vez, deve ser proporcional à área superficial do líquido. Com isso, definimos a tensão superficial (γ) como sendo a energia potencial por unidade de área na superfície:

$$dU = \gamma dA$$

Entre interfaces de fluidos homogêneos, γ é constante e portanto a energia superficial é diretamente proporcional à área. Veja que, como a energia da superfície é positiva, uma superfície líquida tentará naturalmente reduzir sua área superficial para minimizar a energia! Com isso:

(a) Encontre a força de interação entre duas partes de uma superfície líquida separadas por uma linha imaginária de comprimento l; Ache a mínima força necessária para mover um filme fino de sabão de comprimento L e certa largura.

(b) Quando uma diferença de pressão é aplicada entre as faces de uma superfície, ela se curva. Determine a diferença de pressão entre as duas faces de uma superfície arbitrária formada por dois segmentos perpendiculares entre si, de raios de curvatura R_1 e R_2; Ache a diferença de pressão entre o interior e o exterior de (i) uma gota líquida (ii) uma bolha de sabão, ambas de raio R.

2. Gamou

Considere uma linha de contato entre três substâncias, um gás, um líquido, e um sólido. Então nós temos três interfaces: líquido-gás, sólido-gás, e sólido-líquido; considere que as respectivas tensões superficiais são γ_{lg}, γ_{sg}, γ_{sl}. Encontre o ângulo de contato θ entre as interfaces líquido-gás e sólido-líquido. Utilize argumentos energéticos!. Qual a condição sobre as tensões superficiais tal que (i) o líquido se disperse pela superfície sólida e (ii) uma fina camada de gás se forme entre o líquido e a superfície sólida.

3. Capilaridade

Quando um tubo de pequeno raio r e aberto nas duas extremidades é parcialmente inserido em um grande recipiente com certo líquido, é possível notar que o líquido é "sugado" para dentro do tubo, atingindo um nível vertical maior do que o do fluido no recipiente. Além disso, a superfície livre dentro do líquido no tubo se curva, formando o chamado menisco.

(a) Determine a altura h da coluna de líquido acima do nível do líquido no recipiente, em termos de g, ρ, γ, θ (ângulo de contato) e r. Despreze o volume do menisco.

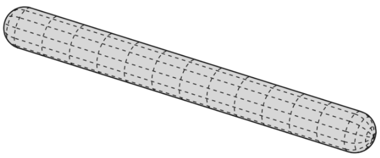
(b) Determine a profundidade H do menisco (i.e. a altura do maior nível vertical menos a altura do menor nível vertical da água no tubo), em termos de ρ, γ e θ, para um tubo de raio arbitrário. Sob qual condição é válido desprezar o volume do menisco no item anterior? Isto é, estabeleça a condição que define um raio de tubo pequeno.

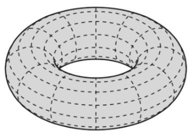
4. De boa na lagoa

Alguns insetos, como os gafanhotos, são capazes de se mover livremente na superfície da água, porque suas pernas são densamente cobertas de pelos que não molham. Para entender esse fenômeno, considere o seguinte modelo: Uma placa quadrada de lado $a = 10,0$ cm e espessura $h = 2,00$ mm é cuidadosamente colocada na superfície da água em um lago. A densidade do material da placa é igual a $\rho = 1,10$ g/cm^3 e a densidade da água é $\rho_0 = 1,00$ g/cm^3, e sua tensão superficial $\sigma = 7,30 \cdot 10^{-2}$ N/m. Encontre a massa máxima m de um peso a ser colocado em cima da placa de forma que ela não afunde. Suponha que o peso não deforme a placa, e que a gravidade seja $g = 9,80\ \mathrm{m/s^2}$.

5. Um pouco de culinária

Um curioso evento observado na cozinha é o fato de que, ao se cozinhar uma salsicha, ela sempre se rompe de forma "longitudinal", e nunca na direção "radial"(ou seja, do seu eixo). Por que isso ocorre? Agora, considere que fosse possível produzir uma salsicha em formato toroidal. Onde, e em que direção, essa salsicha se romperia durante o cozimento? Suponha, em ambos os casos, que a espessura da pele da salsicha é uniforme.





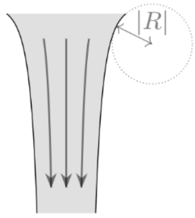
6. Big Bolha

Duas bolhas de sabão de raio R_1 e R_2 estão juntas por um canudo. Ar vai de uma bolha para a outra (qual?) e uma única bolha de raio R_3 é formada. Determine a tensão superficial da solução de sabão sabendo que a pressão atmosférica é p_0. Medir esses três raios configura um bom método adequado para determinar a tensão superficial de líquidos?

7. Dono da Cagece

Quando uma torneira é aberta, uma corrente de água desce com velocidade inicial v_0 do bico da torneira. Para este problema, definimos y como a coordenada vertical com sua direção positiva apontando para cima, sendo $y = 0$ para o bico da torneira. Assuma que a corrente de água que cai da torneira seja cilindricamente simétrica em torno de um eixo vertical que passa pelo centro da corrente. Suponha também que o volume de água por unidade de tempo que sai do bico seja constante, e que esteja estabelecido um fluxo estacionário e laminar. Neste caso, o raio r da corrente de água é uma função da posição vertical y. Seja o raio da torneira r_0. Você pode supor ao longo do problema que qualquer velocidade radial da água é desprezível. A interface água-ar possui tensão superficial σ. Assuma, no item (a), que o raio de curvatura R da superfície externa do fluxo de água seja muito maior do que o da superfície interna, i.e. $|R| >> |r(y)|$, de forma que o perfil vertical do fluxo possa ser desprezado. Considere a água é incompressível.

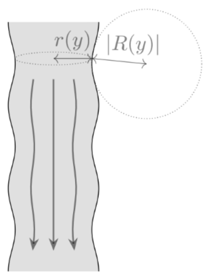
(a) Encontre $r(y)$ em termos σ, r_0, v_0 e ρ, a densidade da água. Considere que a variação no raio do fluxo de água é pequena, i.e. $r_0 - r(y) = \epsilon$, com $\epsilon \ll 1$.



(b) Depois de cair por alguma distância, é observado que o fluxo de água geralmente se quebra em gotículas menores. Isso ocorre porque pequenas perturbações aleatórias na forma do fluxo crescem ao longo do tempo, eventualmente separando-o. Para o resto deste problema, ignore a mudança no raio do fluxo devido à mudança de velocidade da água, como considerado anteriormente. Considere uma corrente de água cujo raio obedece

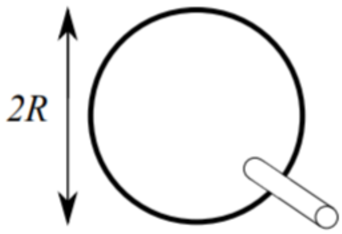
$$r(y) = r_0 + A\cos(ky)$$

Em que $A \ll r_0$ é a amplitude de perturbação. Para analisar tal fluxo, é suficiente considerar apenas as partes mais "grossas" e mais "finas" da corrente. Considerando agora ambas as fontes de curvatura (R e r), encontre uma condição em r_0 e k tal que o tamanho das perturbações aumente com o tempo.



8. Bolha Carregada

Uma bolha de sabão de tensão superficial $\gamma = 1,0 \cdot 10^{-2}$ N/m e de massa $m = 1,0 \cdot 10^{-5}$ kg foi enchida através de um tubo curto e fino. A bolha é então carregada com uma carga $Q = 5,4 \cdot 10^{-8}$ C. O tubo continua aberto.

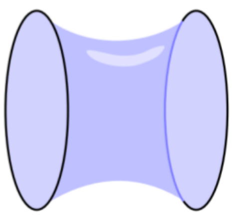


(a) Determine o raio de equilíbrio e o período de pequenas oscilações radiais da bolha.

(b) De repente, a bolha recebe uma carga $Q_1 = 10Q$, estime a velocidade das gotas de sabão após a bolha estourar. A permissividade elétrica do meio é $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ (C^2/J $\cdot$ m).

9. Momentos de tensão

Pompom, um casual apreciador de bolhas de sabão, resolve performar o seguinte experimento: ele estica um filme de sabão de tensão superficial γ entre dois aros circulares de raio a, separados por uma distância inicial $2b$.



(a) Ajude Pompom a encontrar o formato $r(z)$ que a superfície do filme assume, sendo r a distância radial do filme ao seu eixo de simetria e z a distância ao longo do eixo.

(b) Agora, o jovem resolve aumentar lentamente a distância entre os aros, e percebe que o filme estoura quando a distância entre eles atinge um valor crítico $2b_0$. Ajude-o a determinar essa distância!

10. Olha a onda

(a) Determine a velocidade de propagação de pequenas perturbações em um filme fino de sabão de espessura e, com densidade ρ e tensão superficial γ.

(b) Um pequeno pulso se propaga na superfície de uma bolha de sabão de massa m. Ache o tempo necessário para o pulso retornar ao ponto em que foi gerado. A tensão superficial da solução é γ.

Gabarito

1. **(a)** γl; $2\gamma L$

   (b) $\Delta p = \gamma\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$; $\Delta p = \dfrac{2\gamma}{R}$ e $\dfrac{4\gamma}{R}$, respectivamente.

2. $\cos\theta = \dfrac{\gamma_{sg} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lg}}$; $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} > \gamma_{lg}$ e $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} < \gamma_{lg}$, respectivamente.

3. **(a)** $h = \dfrac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$

   (b) $H = \sqrt{\dfrac{2\gamma(1-\sin\theta)}{\rho g}}$; $r \ll \sqrt{\dfrac{\gamma}{\rho g}}$.

4. $m = (\rho_0 - \rho)a^2 h + 2a^2\sqrt{\dfrac{\sigma\rho_0}{g}} = 52,6$ g

5. Demonstração. No sentido azimutal; ao longo da linha circular mais interna do toroide.

6. $\gamma = \dfrac{p_0}{4}\dfrac{R_3^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}$ e o ar flui da menor bolha para a maior; Não.

7. **(a)** $r(y) = r_0\left(1 - \dfrac{\rho g y}{2\rho v_0^2 + \dfrac{\sigma}{r_0}}\right)$

   (b) $kr_0 < 1$

8. **(a)** $R_0 = \left(\dfrac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} = 3,0$ cm;

   $T = \sqrt{\dfrac{\pi m}{12\gamma}} = 16$ ms

   (b) $v = \sqrt{\dfrac{100Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0 m}} = 94$ m/s

9. **(a)** $r(z) = r_0 \cosh\left(\frac{z}{r_0}\right)$, com $a = r_0 \cosh\left(\frac{b}{r_0}\right)$.

   (b) $\frac{a}{b_0} = \sinh\left(\sqrt{1 + \left(\frac{b_0}{a}\right)^2}\right)$

10. **(a)** $c = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho e}}$

    (b) $\Delta t = \sqrt{\frac{\pi m}{2\gamma}}$